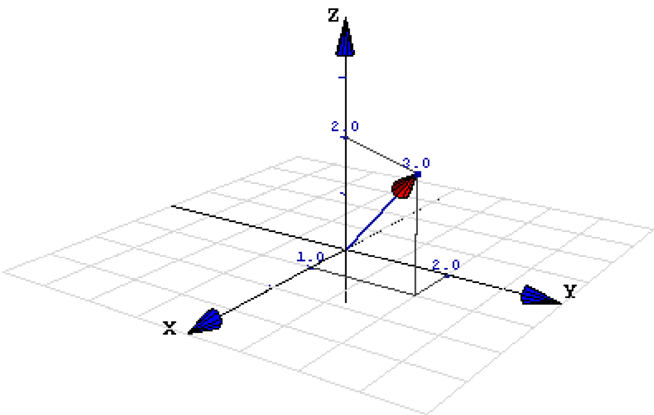
Instrucciones:

- Arrastre el ratón para rotar la figura.
- Arrastre la punta del vector. Puede también arrastrar las coordenadas x, y, z del vector.
- En la punta del vector aparece su módulo
- Shift + arrastre vertical = zoom



Como ya sabes, los vectores los encontramos a nuestro alrededor en múltiples situaciones. En este caso, te proponemos una que está presente mires donde mires. ¿Sabías que entre dos objetos cualesquiera existe una fuerza de atracción? ¿Sabías que la fuerza de atracción entre una persona y la Tierra determina su peso? ¿Sabías que el peso es una magnitud vectorial? Efectivamente, estamos acostumbrados a manejar el módulo del vector peso, pero tiene una dirección, que es la recta que pasa por la persona y el centro de la Tierra y un sentido, que es el que va de la persona al centro de la Tierra.

La fuerza de atracción $\vec{F}$ entre un objeto de masa *M* y otro de masa *m*, cuando una distancia *r* separa los centros de ambos viene dada por la fórmula:

$$\vec{F} = G\ \frac{M \cdot m}{r^2}$$

La constante universal *G* fue medida por Cavendish utilizando un experimento en función del ángulo que gira el hilo que une dos cuerpos, en función de lo cerca que estén los cuerpos. La fuerza es un vector cuyo módulo se calcula según la fórmula anterior. La dirección y el sentido serían la recta que une el centro de ambos cuerpos y desde el más pequeño al más grande.

Autoevaluación

1.- El módulo del vector $\vec{u} = (1,0,0)$ es ☐ .

2.- El módulo del vector $\vec{v} = (3,0,4)$ es ☐ .

3.- El módulo del vector $\vec{w} = (0,8,6)$ es ☐ .

Comprobar

Importante

El módulo de un vector cumple las siguientes propiedades:

Si tenemos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y dado un número cualquiera positivo k tenemos que:

1. Si $\vec{w} = k \cdot \vec{u}$ entonces $|\vec{w}| = k \cdot |\vec{u}|$
2. $|\vec{v} + \vec{u}| \leq |\vec{v}| + |\vec{u}|$
   Esta última propiedad es muy sencilla de ver ya que al contruir gráficamente la suma de dos vectores nos resulta un triángulo y lo que la propiedad indica es que uno de los lados de ese triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Reflexión

Si tenemos los vectores $\vec{u} = (2, -5, -3)$, $\vec{v} = (-8, 3, 2)$ y el número *k* = 7, comprueba que se cumplen las dos propiedades anteriores.

Reflexión

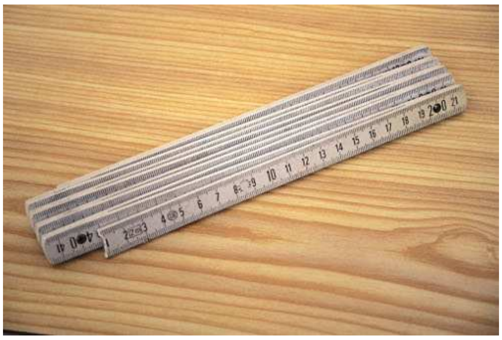
Comprueba que el triángulo determinado por los puntos *A* (2, 1, 0), *B* (7, –2, –1) y *C* (3, 2, 2) es rectángulo con el ángulo recto en el vértice *A*.

1.2. Vector unitario

Cuando tenemos una medida de longitud la expresamos en función de una unidad de medida, por ejemplo el metro. Igual sucede con una medida de área que por ejemplo la expresamos en metros cuadrados.

En el caso de los vectores vamos a buscar las "unidades" correspondientes.

video youtube
http://www.youtube.com/v/Sm-HYObGywc&hl=es_ES&fs=1
400x321



Metro. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

Importante

Cuando un vector tiene módulo 1 se denomina **vector unitario**.

Ya conoces algunos de estos vectores unitarios: $\vec{u_1}=(1,0,0)$, $\vec{u_2}=(0,1,0)$ y $\vec{u_3}=(0,0,1)$, que forman la base que de forma habitual utilizamos para el espacio. A partir de estos tres vectores unitarios tenemos que un vector cualquiera, por ejemplo $\vec{v}=(3,4,8)$ lo podemos expresar como $\vec{v}=3\vec{u_1}+4\vec{u_2}+8\vec{u_3}$

Además de estos vectores unitarios, podemos conseguir muchísimos más. ¿Cómo? En el siguiente ejemplo te lo aclaramos:

Ejercicio resuelto

Calcula un vector unitario a partir del vector $\vec{v}=(1,-3,1)$, es decir, un vector que tenga la misma dirección y el mismo sentido, pero que su módulo sea 1.

Autoevaluación

De cada uno de los siguientes vectores, responde verdadero si es unitario y falso si no lo es.

$\vec{u}_1=(1,0,1)$

Verdadero ○ Falso ○

$\vec{u}_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

Verdadero ○ Falso ○

$\vec{u}_3=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

Verdadero ○ Falso ○

$\vec{u}_4=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

Verdadero ○ Falso ○

$\vec{u}_5=(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0)$

Verdadero ○ Falso ○

Curiosidad

Hermann Grassmann era el tercero de los doce hijos de Justus Günter Grassmann y Johanne Luise Friederike Medenwald. Su madre era hija de un pastor de Klein-Schönfeld. Su padre también había sido consagrado pastor, pero consiguió una plaza de profesor de matemáticas y física en el Instituto de Stettin. Fue un académico notable, autor de libros de texto escolar de Física y Matemáticas, y llevó a cabo investigaciones en el campo de la cristalografía. Otro hermano de Hermann, Robert, también se dedicó a las matemáticas y ambos trabajaron conjuntamente en muchos proyectos.

Entre otros temas, Grassman realizó un ensayo sobre la teoría de las mareas. Lo elaboró en 1840, tomando como base la teoría de la Méchanique analytique de Lagrange y de la Méchanique céleste de Laplace, pero exponiendo esta teoría por métodos vectoriales, sobre los que trabajaba desde 1832. Este ensayo, publicado por primera en los Collected Works de 1894-1911, contiene el primer testimonio escrito de lo que hoy se conoce como álgebra lineal y la noción de espacio vectorial.

En 1844, Grassmann publica su obra maestra, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, más conocido como Ausdehnungslehre, que se puede traducir como "teoría de la extensión" o "teoría de las magnitudes extensivas". Después de proponer en ella nuevas bases para todas las matemáticas, el trabajo empieza con definiciones de naturaleza más bien filosófica. Grassmann demostró además que si la geometría se hubiese expresado en forma algebraica como él proponía, el número tres no hubiese desempeñado el papel privilegiado que tiene como número que expresa las dimensiones espaciales; de hecho, el número de posibles dimensiones de interés para la geometría es ilimitado.

La idea puede parecernos ahora simple, pero en aquella época suponía un auténtico golpe de audacia. El planteamiento era (y sigue siendo) el siguiente: Grassmann define unos “vectores línea” (Strecke) que tienen módulo unidad y están situados en los ejes de coordenadas. Por ejemplo, en el plano se tienen $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$ el primero sobre el eje X y el segundo sobre el eje Y, de forma que el vector (2, 3) es la suma vectorial de dos veces el primero más tres veces el segundo:

$$2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$$

Se trabajaría análogamente en tres dimensiones, donde un vector cualquiera como (3, –2, 1) vendría representado como:

$$3\vec{e_1}-2\vec{e_2}+\vec{e_3}$$

Por todo ello H. G. Grassmann está considerado como el fundador del Cálculo Vectorial.

1.3. Aplicaciones

Ahora que conocemos la forma de calcular el módulo de un vector y las propiedades, podemos utilizarlos para resolver problemas que podemos encontrar en nuestro entorno. En esta parte vamos a proponer alguno que nos sirva de ejemplo.

Autoevaluación

Si tenemos los vectores $\vec{u}=(-1,2,2)$ y $\vec{v}=(2,0,0)$ sabemos que:

$|\vec{u}|=$ ☐

$|\vec{v}|=$ ☐

$|\vec{u}|+|\vec{v}|=$ ☐

$|\vec{u}+\vec{v}|=$ ☐

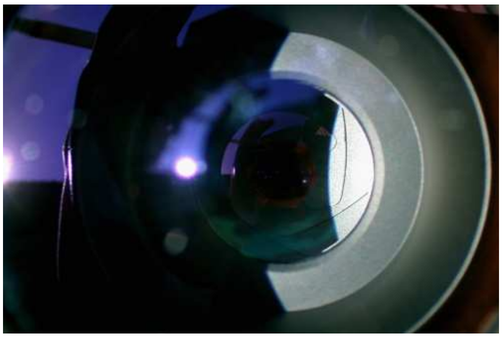
Comprobar

Ejercicio resuelto

Los telescopios se han convertido en los ojos que tenemos en la Tierra para observar lo que ocurre en el Universo.

Estas herramientas disponen de varios espejos que van concentrado las imágenes que reciben. Estos espejos deben permanecer limpios, por lo que deben someterse a un proceso rutinario cada cierto tiempo de forma que se elimine cualquier mota de polvo que pueda inducir a error a los investigadores.

El espejo más grande que tiene un telescopio se denomina espejo primario y es al que llega la primera imagen que se observa para posteriormente ser concentrada. Algunos de estos espejos pueden llegar a pesar 20 toneladas, medir 8,2 metros de diámetro y tener 37 centímetros de grosor. Además, a pesar de lo coloso que parecen están creados con tal precisión que su error es inferior a 10 nanómetros. este es el caso de los espejos que componen el gran telescopio VLT que localizamos en Chile y que puedes observar en el vídeo siguiente:



Lente de telescopio. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

video youtube
http://www.youtube.com/v/u8d5xSdL4Rc&hl=es_ES&fs=1
400x321

Cada vez que se tiene que limpiar uno de estos espejos, la labor de transporte al centro de limpieza debe hacerse con una precisión exquisita ya que un mínimo error podría suponer la rotura de la lente y, por tanto, suponer un coste de miles de millones.

En este caso, la lente que nos ocupa no puede estar sometida a una fuerza superior a 12 kilopondios ya que en caso contrario, la presión podría provocar su rotura. Para desmontar esta lente se van a utilizar cuatro grúas que, tras su ajuste, aplicarán cada una de ellas una fuerza distinta que levantará la lente y la trasladará al camión especial de transporte. Las cuatro grúas aplicarán la fuerza a la vez y, según han calculado los técnicos, la primera grúa aplicará la fuerza $\overrightarrow{f_1}=(4,-3,7)$, la segunda $\overrightarrow{f_2}=(-5,9,1)$, la tercera $\overrightarrow{f_3}=(0,-5,3)$ y la cuarta $\overrightarrow{f_4}=(6,10,-4)$. ¿Resistirá la lente?

Ejercicio resuelto

Una de las medidas más ambiciosas de investigación que se pretenden realizar es poner en órbita alrededor de Saturno un satélite que pueda tomar muestras de la atmósfera de este planeta y pueda trazar un perfil de su superficie. El cohete será lanzado desde un punto de Australia y, para su lanzamiento se deben tener en cuenta dos medidas fundamentales. Por una parte la dirección de lanzamiento y por otra la cantidad de fuerza con la que debe ser lanzado para superar la atracción de la Tierra y que llegue a la órbita de Saturno con la velocidad justa para que se quede en órbita alrededor del planeta. Dos equipos de investigación están siendo los encargados de determinar estas dos medidas, de cuya combinación debe salir el vector de fuerza con el que debe ser lanzado el cohete.
El primer equipo ha determinado que el cohete debe ser lanzado a las 21:11:23 horas del 7 de abril y que el vector de dirección del cohete debe ser $\vec{d}=(6,3,2)$.
El segundo equipo ha determinado que la fuerza inicial a la que se debe someter el cohete es de 364 kilopondios.
¿Puedes ayudarles a calcular el vector de fuerza al que deben someter el cohete para despegar?

Cohete despegando. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

Curiosidad

En genética, un vector es un agente que transfiere información genética, por algún tipo de medio, de un organismo a otro. Un vector con el que los científicos experimentan son los plásmidos, con los que es posible insertar genes foráneos al núcleo de una célula. También se les puede considerar vectores genéticos a todo tipo de virus, puesto que su principal función es insertar información genética en otras células.

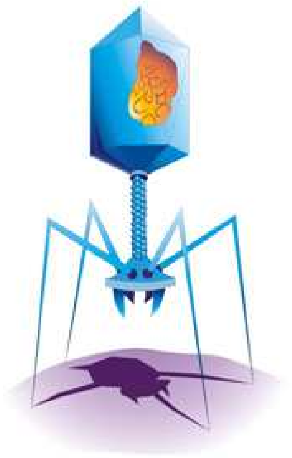


Imagen de José Alberto Bermúdez tomada del
Banco de Imágenes y sonidos del ITE

Existen distintos campos en los que se emplea el término vector, pero con un significado equivalente:

- *Vector biológico,* un agente orgánico que sirve como medio de transmisión.
- *Vector epidemiológico*, un organismo capaz de portar y transmitir un agente infeccioso.
- *Vector genético*, un agente que porta un gen extraño o modificado.
- *Vector viral*, virus modificado que permite introducir material genético exógeno en el núcleo de una célula.
- *Vector de ADN* es un organismo que se utiliza para transferir material genético exógeno a otra célula.
- *Vector de datos*, un conjunto de variables del mismo tipo cuyo acceso se realiza por índices.
- *Vector de interrupciones*, el registro que apunta a la dirección en memoria del gestor de la interrupción.
- *VectorLinux*, un sistema operativo, con distribución de GNU/Linux basado en Slackware.
- *Gráfico vectorial*, es un dibujo realizado en un programa de diseño gráfico el cual no se distorsiona independientemente de la medida en que se imprima.

2. Producto escalar

Acabas de ver una de las características propias de cada vector. Su longitud. Una longitud que viene dada por un número que puede ayudarnos en el espacio a calcular distancias.

Ahora nos preparamos para realizar una operación con los vectores, pero antes de esto queremos que hagas un recorrido por elementos matemáticos que conoces. Si realizas una operación con dos números (suma, resta, producto...) el resultado es... Efectivamente, otro número. Si realizas una operación con dos matrices (siempre que se pueda) el resultado es una matriz. Si sumas dos vectores obtienes otro vector. Pues bien, ahora vamos a realizar una operación muy sencilla con dos vectores, pero sorprendentemente, el resultado de esta operación no va a ser otro vector, sino un número, un escalar.

La operación va a ser el producto y, dado el resultado que vamos a obtener (un número, un escalar) se denomina producto escalar. En la animación de la derecha, identificando subir con escalar, hemos representado a modo de parodia, el producto escalar de dos vectores.

Ahora presta atención ya verás que la operación es muy sencilla.

esca.swf

300x500

2.1. Definición y propiedades

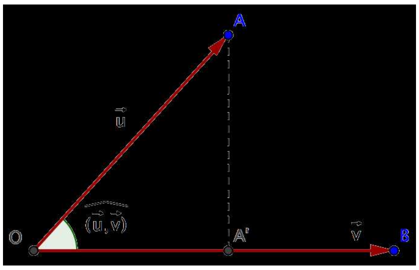
youtube
http://www.youtube.com/v/G_DMeULtAA0&hl=es_ES&fs=1
400x380

Importante

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se define su **producto escalar** como el número que resulta de:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Donde $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es el ángulo que forma $\vec{u}$ con $\vec{v}$.



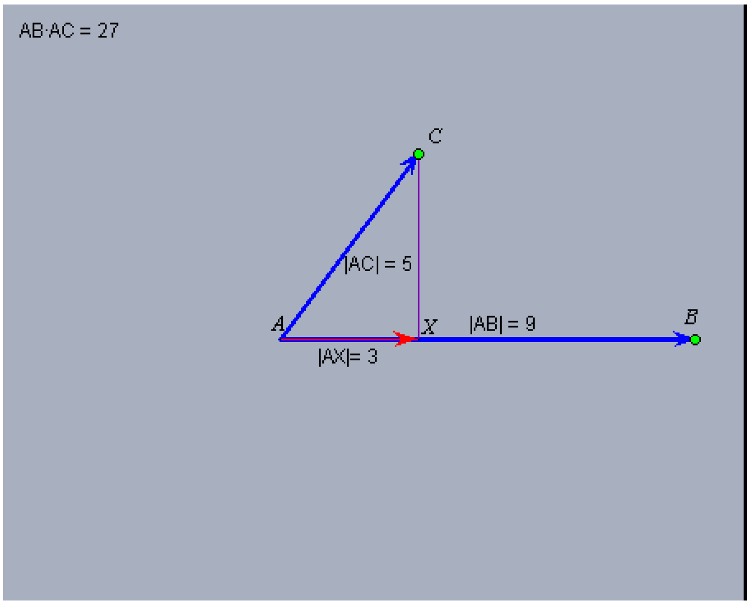
Utilizando la trigonometría, según la imagen que observamos en la parte de la derecha, sabemos que la **proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$** es:

$$proy_{\vec{v}}(\vec{u})=|\overrightarrow{OA'}|=|\vec{u}|\cdot\left|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|$$

Por tanto, el valor absoluto del producto escalar del vector $\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ es el resultado de multiplicar la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ por el módulo del vector $\vec{v}$.

En la siguiente pantalla podemos comprobar lo anterior.

Observa que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es lo mismo que el producto de $\left|\overrightarrow{AX}\right|$ (proyección de $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{AB}$) por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Esto nos da la oportunidad de calcular la longitud de esa proyección mediante una simple deivisión. También nos da la posibilidad de conocer el ángulo que forman los dos vectores despejando.



Importante

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la definición del producto escalar:

- $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$
  Esto es así ya que:
  $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}})=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot 1=|\vec{u}|^2$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
  Lo que es consecuencia de que el coseno de dos ángulos que se diferencian en el signo es el mismo.
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos y su producto escalar es 0 entonces el ángulo que forman es de 90º. Diremos que los **vectores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales**.

También se pueden demostrar, aunque es un poco más complicado las siguientes propiedades:

- El producto escalar cumple la propiedad distributiva:
  $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- El producto escalar cumple esta propiedad que relaciona el producto escalar con el producto por escalares:
  $(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\cdot\vec{v})=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Si usamos una base ortonormal, es decir una base formada por tres vectores $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ que tienen módulo uno y además son ortogonales dos a dos, entonces podemos obtener de forma sencilla una expresión analítica para el producto escalar.
Dados dos vectores, cuyas componentes son conocidas en la base ortomormal, por ejemplo $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ podemos proceder como sigue:

$$\begin{gathered}
\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\cdot(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})= \\
=u_1v_1(\vec{i}\cdot\vec{i})+u_1v_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+u_1v_3(\vec{i}\cdot\vec{k})+u_2v_1(\vec{j}\cdot\vec{i})+u_2v_2(\vec{j}\cdot\vec{j}) \\
+u_1v_3(\vec{j}\cdot\vec{k})+u_3v_1(\vec{k}\cdot\vec{i})+u_3v_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+u_3v_3(\vec{k}\cdot\vec{k})= \\
=u_1v_1\cdot 1+u_1v_2\cdot 0+u_1v_3\cdot 0+u_2v_1\cdot 0+u_2v_2\cdot 1+u_1v_3\cdot 0+u_3v_1\cdot 0+u_3v_2\cdot 0+u_3v_3\cdot 1= \\
=u_1v+u_2v_2+u_3v_3
\end{gathered}$$

Donde hemos hecho uso de la propiedad distributiva del producto escalar y de que al ser la base ortonormal se tiene que:

$$\begin{gathered}
\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|=1;\ \vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{i}|=1;\ \vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{i}|=1 \\
\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0
\end{gathered}$$

Importante

Luego, si tenemos dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ podemos calular el producto escalar de los dos vectores anteriores con la siguiente expresión analítica:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$$

Ejercicio resuelto

Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}=(2,3,-4)$ y $\vec{v}=(4,-5,2)$

Autoevaluación

Calcula el producto escalar de los dos vectores que aparecen en cada uno de los siguientes apartados:

$\vec{u}=(2,3,-1)$ y $\vec{v}=(-1,0,0)$. El producto escalar es

$\vec{u}=(-3,10,3)$ y $\vec{v}=(-2,0,3)$. El producto escalar es

$\vec{u}=(9,1,-2)$ y $\vec{v}=(-3,-1,2)$. El producto escalar es

Comprobar

Ejercicio resuelto

Calcula el vector proyección del vector $\vec{u}=(3,4,-1)$ sobre el vector $\vec{v}=(5,-2,4)$.

Ayúdate de la imagen que aparece en la definición inicial de producto escalar.

2.2. Ángulo entre dos vectores

Otra de las utilidades que le encontramos al producto escalar es que nos puede ayudar a calcular el ángulo entre dos vectores. Así, en esta parte del tema vamos a calcular el ángulo entre dos vectores cualesquiera. O bien el ejercicio contrario y que nos puede resultar más útil, encontrar un vector que forme un determinado ángulo con otro vector. Para que te resulte más simple, te ofrecemos en la parte inferior dos herramientas que te ayudarán a resolver los ejercicios que te proponemos.

Importante

El producto escalar nos permite calcular el ángulo entre dos vectores:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Aquí te dejamos una herramienta útil con la que puedes practicar lo que has aprendido en el tema:

Escalar **K1** :
Borrar K1

Escalar **K2** :
Borrar K2

Escalar **K3** :
Borrar K3

Coseno entre **U1 y U2** :
Borrar K3

Vector **U1** :
Borrar U1

Vector **U2** :
Borrar U2

Vector **U3** :
Borrar U3

Vector **U7** :
Borrar U7

Módulo de **U1** :
Borrar

Módulo de **U2** :
Borrar

Módulo de **U3** :
Borrar

Producto escalar **U1*U2** :
Borrar

Cambios:

U7 --> U1

U7 --> U2

U7 --> U3

Operaciones:

U1 + U2 = U7

K1*U1+K2*U2+K3*U3=U7

Coseno del ángulo entre U1 y U2

Operaciones:

Módulo de U1

Módulo de U2

Módulo de U3

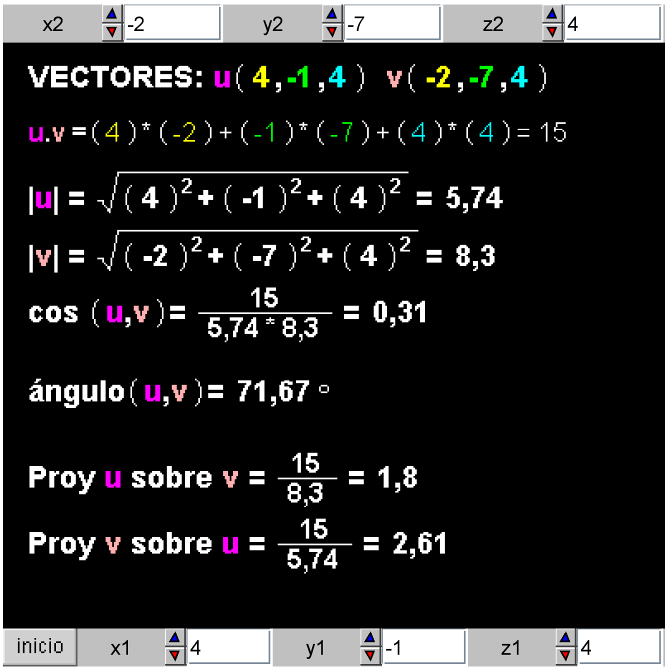
Producto U1*U2

Autoevaluación

Si tenemos los vectores $\vec{u}=(1,-2,4)$, $\vec{v}=(3,5,-2)$, $\vec{w}=(1,-3,0)$ y $\vec{d}=(7,0,-2)$, los que forman un ángulo de 56,147º son los vectores:

- $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- $\vec{u}$ y $\vec{w}$
- $\vec{u}$ y $\vec{d}$
- $\vec{v}$ y $\vec{w}$
- $\vec{v}$ y $\vec{d}$
- $\vec{w}$ y $\vec{d}$

El siguiente applet permite el cálculo del producto escalar de dos vectores, el ángulo formado por ambos y también las proyecciones de cada uno de los vectores sobre el otro.



Ejercicio resuelto

youtube
http://www.youtube.com/v/7agijZWQTkM&hl=es_ES&fs=1
400x321

Uno de los espectáculos que más celosamente se guardan en toda ceremonia de inauguración o clausura que se precie son los fuegos artificiales. Estos elementos dan el toque más visual a una fiesta a la que pone el pistoletazo de salida o el punto y final.

La empresa de Ramón que te presentamos en la historia inicial de este tema se dedicaba al aprovechamiento de los recintos y pabellones que habían sido utilizados para distintos eventos universales, como las exposiciones universales. Estas exposiciones suelen tener espectáculos pirotécnicos que, tras el cierre de la exposición, se siguen celebrando como parte de las actividades que se celebran en un parque temático creado en ese recinto. En el vídeo de la derecha podemos observar parte del espectáculo pirotécnico de la Expo de Zaragoza 2008.

Estos espectáculos pirotécnicos tienen detrás un estudio científico que lo sustentan que hacen que cada cohete salga con la fuerza justa para llegar a un determinado punto o que los cohetes formen entre sí un ángulo concreto para que formen una figura determinada o un efecto coordinado. Este es el caso en el que nos vamos a detener.

La empresa pirotécnica *Toyquexploto* está diseñando un expectáculo pirotécnico. Desean formar con tres cohetes las tres puntas de un escudo en el cielo. Con este motivo han hecho un diseño previo en el ordenador en el que el primer cohete partirá con una velocidad marcada por el siguiente vector $\vec{v}=(1,1,0)$ y el otro cohete partirá con una velocidad marcada por el siguiente vector $\vec{u}=(4,0,0)$. Para formar los tres picos de la corona se necesita un tercer cohete que debe salir con una velocidad de 6m/s formando un ángulo de 45º con cada uno de los vectores anteriores. Necesitamos que calcules el valor de la velocidad del primer y del segundo cohete y el vector velocidad del tercer cohete.

Debes tener en cuenta que $sen(45^o)=cos(45^o)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio resuelto

youtube
http://www.youtube.com/v/m2YI_88NhAo&hl=es_ES&fs=1
400x241

En el mundial celebrado en el año 2010 en Sudáfrica, España se proclama campeona del mundo tras ganar a la selección de Holanda (0-1) en un partido que tuvo que llegar a la prórroga. La selección holandesa que salió a repartir patadas y no dejar jugar, tuvo que conformarse con la segunda posición en el primer mundial ganado por la selección española. El partido se decidió por un gol marcado por Iniesta en la segunda parte de la prórroga. En el vídeo puedes recordar algunos momentos del partido.

Según las sensaciones de los jugadores de las distintas selecciones, el balón con el que se jugó, a veces hacía algunos extraños. Por este motivo, algunas imágenes fueron monitorizadas y estudiadas por ordenador. Concretamente, la jugada del gol español fue una de ellas. Según la cuadrícula marcada por los investigadores, Iniesta recibe el balón que sigue la trayectoria marcada por el vector $\vec{u}=(12,-4,5)$ y lanza a portería según la trayectoria del vector $\vec{v}=(3,5,3)$. Si el balón hubiese sido normal, el ángulo entre los dos vectores debería encontrarse entre 31º y 93,7º. ¿Fue normal la trayectoria seguida por el balón?

3. Para saber más

Ejercicio resuelto

Sean los puntos $A=(2,-1,1)$ y $B=(3,0,-2)$ y la recta: $r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

Determina los puntos *P* de la recta *r* tales que el triángulo *ABP* es rectángulo con hipotenusa *AB*. Hallar el área del triángulo.

Ejercicio resuelto

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores, demostrar que $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2)$

Ejercicio resuelto

Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,2,a)$ y $\vec{w}=(2,0,0)$

1. Halla los valores de *a* para los que los tres vectores son linealmente independientes.
2. Determina los valores de *a* para los que los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{w}$ son ortogonales.

Ejercicio resuelto

Calcula un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores (1,0,2) y (2,0,1).

Ejercicio resuelto

Halla dos vectores linealmente independientes que sean ortogonales al vector $\vec{u}=(1,1,3)$.

Ejercicio resuelto

Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector $\vec{v}=(1,2,1)$

Ejercicio resuelto

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulo 4 y 3 respectivamente. Calcula el módulo de los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}$.

Para saber más

Para reforzar el aprendizaje de los conceptos y técnicas que has estudiado en este tema te proponemos los siguientes ejercicios:

* Ejercicios de consolidación.
* Solución a los ejercicios propuestos.

Sigue la Flecha de Antonio CE
con licencia Creative Commons

4. Especial selectividad

Vamos con la última parte del tema. Recuerda que lo que pretendemos aquí es mostrarte ejemplos de actividades que han aparecido en Selectividad, en particular en la Universidad de Zaragoza, pero puedes encontrar ejercicios similares aparecidos en otras universidades. Son ejercicios parecidos a los que los que van a aparecer en la tarea presencial o en la tarea del tema, por lo que te vendrá bien ver los procesos que se han empleado para resolverlos. Recuerda que vamos a utilizar las mismas operaciones y propiedades que tienes que utilizar en los ejercicios que si debes hacer.

No debes olvidar, por otra parte, que en los enlaces siguientes puedes ver:

* Los enunciados de las pruebas de la Universidad de Zaragoza.
* Los exámenes resueltos en la página web de José Mª Sorando.

Ejercicio resuelto


Junio 1995

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en el plano. Demostrar que si los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

Ejercicio resuelto


Junio 1997

Sea $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ una base ortonormal. Hallar todos los vectores que son ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ que tengan módulo 1.

Ejercicio resuelto


Septiembre 2001

Dados los puntos *A* (1, 1, 1), B (–1, 3, 1), *C* (1, 0, 0) y *D* (0, 2, 0) se pide: hallar el punto *P* perteneciente a la recta determinada por *A* y *B* tal que el triángulo *CDP* sea rectángulo con hipotenusa *CP*.

Ejercicio resuelto

1. 

Septiembre 2008

1. Obtener los valores *a* y *b* para los que el vector (*a*, b, 0) tiene módulo $\sqrt{2}$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = -1 \end{cases}$
2. Estudiar si los vectores $\vec{u} = (3,1,2)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ y $\vec{w} = (0,1,-1)$ son linealmente independientes.
3. Calcular el ángulo que forman dos rectas cuyos vectores direccionales son $\vec{v}$ y $\vec{w}$ respectivamente.