Empezaremos demostrando una identidad entre números combinatorios:

$$\boxed{k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}}$$

En efecto, aplicando la definición de número combinatorio tenemos que:

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = \cancel{k} \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{\cancel{k} \cdot (k-1)! \cdot [(n-1)-(k-1)]!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

La media

Una vez lo hemos comprobado, vamos calcular la esperanza matemática. De acuerdo con la definición y teniendo en cuenta que el primer sumando es cero:

$$\mu = \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x \cdot P(X=x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Ahora aplicaremos el resultado anterior y dado que en cada sumando hay un factor n y otro p comunes, podremos escribir que:

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

El último sumando es el desarrollo de la siguiente potencia: $[p+(1\text{-}p)]^{n\text{-}1} = 1^{n-1} = 1$. Luego:

$$\boxed{\mu = n \cdot p}$$

La desviación típica

Empezaremos desde la definición que ya conocemos:

$$\sigma^2 = \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x^2 \cdot P(X=x) - \mu^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - \mu^2$$

El primer sumando es cero ($k=0$). Usando de nuevo la identidad demostrada al principio, tenemos:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - (n \cdot p)^2 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - (n \cdot p)^2 =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} - (n \cdot p)^2$$

Cambiamos $k\text{-}1$ por r (y por tanto $k = r+1$; y los límites del sumatorio son ahora 0 y $n-1$) con lo que queda:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot \sum_{r=0}^{n-1} (r+1) \cdot \binom{n-1}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r-1} - (n \cdot p)^2 =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{r=0}^{n-1} r \cdot \binom{n-1}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{(n-1)-r} + n \cdot p \cdot \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{(n-1)-r} - (n \cdot p)^2$$

La primera suma es similar a la que nos ha permitido hallar la media pero de la distribución B(n-a; p). La segunda es el desarrollo de $[p+(1\text{-}p)]^{n\text{-}1} = 1$. sustituyendo queda:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (n-1) \cdot p + n \cdot p - n^2 \cdot p^2 = \cancel{n^2 \cdot p^2} - n \cdot p^2 + n \cdot p - \cancel{n^2 \cdot p^2} = -n \cdot p^2 + n \cdot p = \boxed{n \cdot p \cdot (p-1)}$$

Por tanto, la expresión para el cálculo de la desviación típica es:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (p-1)}}$$