La demostración hace uso de que la suma de la probabilidad extendida a toda la variable aleatoria es 1 (en rojo) y de la definición de la esperanza matemática (en verde):

$$\sigma^2 = \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} (x-2)^2 \cdot P(X=x) = \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} (x^2 + \mu^2 - 2x\mu) \cdot P(X=x) =$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x^2 \cdot P(X=x) + \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} \mu^2 \cdot P(X=x) - \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} 2x\mu \cdot P(X=x) =$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x^2 \cdot P(X=x) + \mu^2 \cdot \underbrace{\sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} P(X=x)}_{=1} - 2\mu \cdot \underbrace{\sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x \cdot P(X=x)}_{=\mu} =$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x^2 \cdot P(X=x) + \mu^2 - 2\mu \cdot \mu = \boxed{\sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x^2 \cdot P(X=x) - \mu^2}$$